8 класс

1. Вася задумал четырёхзначное число и для каждой пары его соседних цифр выписал на доску их произведение. После этого он стёр одно произведение, и на доске остались числа 20 и 21. Какое наименьшее число мог задумать Вася?

Ответ: 3745.

Решение. Так как выписаны произведения 20 и 21, то среди цифр задуманного числа есть цифры 4, 5 и 3, 7, то есть нам известны все его цифры. Цифры 4 и 5, 3 и 7 должны стоять рядом, поэтому наименьшее число, удовлетворяющее условиям, – это 3745, причём Вася стёр произведение $7 \cdot 4 = 28$.

Критерии. Только ответ — 3 балла. Отмечено, что цифры 4 и 5, 3 и 7 стоят рядом — ещё 4 балла. Полное решение — 7 баллов.

2. Трое друзей живут в домах с разными номерами. Оказалось, что у каждого из них номер этажа совпадает с номером дома одного из его друзей. Может ли эта ситуация сохраниться, если

а) один из друзей переедет в своём доме на один этаж выше?

б) каждый из друзей переедет в своём доме на один этаж выше?

Ответ: *а*) *может; б*) *не может.*

Решение. *а*) Назовём трёх друзей Антон, Борис и Сергей. Пусть Антон живёт в доме с номером a. Номер его этажа совпадает с номером дома b одного из его друзей, например, Бориса. По условию $a \neq b$. Предположим, Антон переехал на этаж выше. Теперь номер его этажа равен $b+1$, он не совпадает с b. Значит, он равен номеру дома Сергея, то есть $b + 1 = c$.

Итак, если один из друзей переехал на этаж выше с сохранением свойства номера, то номера его друзей отличаются на 1. Вариантов расселения друзей очень много. Например,

	Номер дома	**Номер этажа до переезда**	**Номер этажа после переезда**
Антон	2	3	4
Борис	3	4	4
Сергей	4	2	2

Некоторые номера этажей совпадают, но это не запрещено условием.

б) Если каждый из друзей переехал с сохранением свойства номера этажа, то у двух остальных номера отличаются на единицу. Но это условие не может выполняться для каждой пары номеров домов! Если минимальный номер n, то другие равны $n + 1$ и $n + 2$, а разница между n и $n + 2$ не равна 1.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Пример в пункте *а*) — 3 балла. Решение пункта *б*) — 4 балла.

3. Последнюю цифру четырёхзначного числа переставили в начало (например, $1234 \to 4123$) и полученное число сложили с исходным. Сумма оказалась равной 3333. Чему равно исходное число, если известно, что в его записи нет цифры 0? Найдите все возможные варианты.

Ответ: 1212 *и* 2121.

Решение. Пусть $\overline{xyzt}$ — искомое четырёхзначное число, и $\overline{txyz}$ — полученное из него. Их сумма равна $S = \overline{xyzt} + \overline{txyz} = 11(100x + 10y + z) + 1001t = 11(\overline{xyz} + 91t) = 3333$. Отсюда $\overline{xyz} + 91t = 303$. Цифра t отлична от нуля и может принимать только значения 1 и 2. (Если $t \geqslant 3$, то $\overline{xyz} < 100$.) Если $t = 1$, то $\overline{xyz} = 212$ и $\overline{xyzt} = 2121$. Если $t = 2$, то $\overline{xyz} = 121$ и $\overline{xyzt} = 1212$.

Таким образом, условию удовлетворяют два числа: 1212 и 2121.

Критерии. Найдено хотя бы одно из чисел — 2 балла. Доказано, что первая (справа) цифра t может принимать только значения 1 или 2, — ещё 2 балла. Полное решение — 7 баллов.

4. Квадрат 10×10 разрезали по клеточкам на 17 прямоугольников, у которых длины обеих сторон больше 1. Какое наименьшее число квадратов могло оказаться среди этих прямоугольников? Приведите пример такого разрезания.

Ответ: *один квадрат.*

Решение. Предположим, что среди прямоугольников нет ни одного квадрата. Пусть a и b — стороны произвольного прямоугольника, причём $a > b$. Так как целое число b больше 1, то $b \geqslant 2$, и значит, $a \geqslant 3$. Следовательно, площадь каждого такого прямоугольника $a \times b$ не менее $2 \cdot 3 = 6$ клеток. Но тогда 17 прямоугольников должны занимать не менее $17 \cdot 6 = 102$ клеток, в то же время исходный квадрат 10×10 имеет всего 100 клеток.

На рисунке 1 приведён пример разрезания квадрата 10×10 на 17 прямоугольников, среди которых ровно один квадрат.

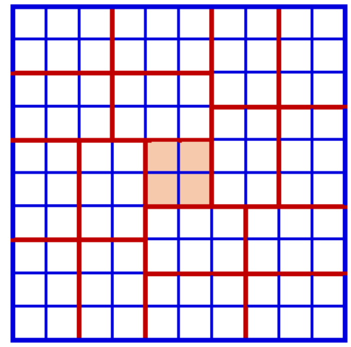

Рис. 1

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Доказано, что площадь каждого неквадратного прямоугольника не менее 6 клеток — 1 балл. Доказано, что среди прямоугольников есть квадрат — ещё 3 балла. Правильный пример разрезания — ещё 3 балла. Полное решение — 7 баллов.

5. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Известно, что $AB = BC = CD$, $AO = 8$ и $\angle BOC = 120°$. Чему равно DO?

Ответ: $DO = 8$.

Решение. Отметим на прямой AC такую точку E, что треугольник BOE — равносторонний (рис. 2). Докажем равенство треугольников BAE и BCO. Действительно, поскольку $AB = BC$, треугольник ABC — равнобедренный, и значит, $\angle BAC = \angle BCA$. Кроме того, отметим ещё одну пару равных углов $\angle AEB = \angle BOC = 120°$. Таким образом, треугольники BAE и BCO равны по стороне и двум углам, отсюда $AE = CO$ и $AO = AE + EO = CO + BO$.

Если отметить на прямой BD такую точку F, что треугольник COF — равносторонний, то аналогичными рассуждениями получим $DO = BO + CO$. Отсюда следует, что $DO = AO = 8$.

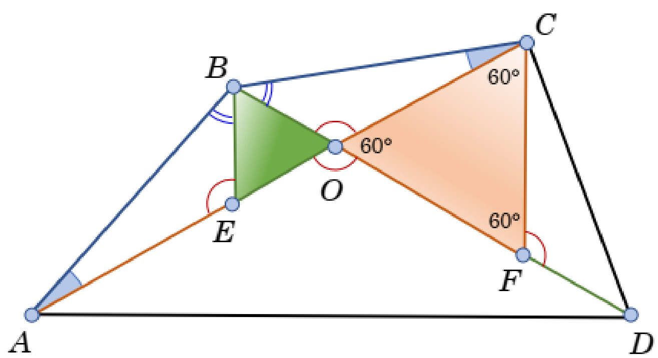

Рис. 2

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Правильное дополнительное построение, связанное с равносторонним треугольником — 2 балла. Установлено равенство $AO = CO + BO$ или аналогичное ему $DO = BO + CO$ — 4 балла. Полное решение — 7 баллов.

9 класс

1. Число 400 разделили на четыре части так, что если к первой части прибавить 1, от второй отнять 2, третью умножить на 3, а четвёртую разделить на 4, то все результаты будут равными. На какие части разделили число 400?

Ответ: *62, 65, 21 и 252.*

Решение. Пусть $4x$ — последняя (четвёртая) часть числа. После деления её на 4 полученный результат, равный x, совпадает с третьей частью, умноженной на 3, потому третья часть числа — $\frac{x}{3}$. Если первую часть увеличить на 1, а вторую уменьшить на 2, — их сумма будет равна $x + x = 2x$. Значит, до изменения частей эта сумма была $(x-1)+(x+2) = 2x+1$. Поскольку сумма всех частей равна 400, имеем уравнение

$$2x + 1 + \frac{x}{3} + 4x = 400, \quad \text{откуда} \quad x = 63,$$

то есть после изменения всех частей результат оказался равным 63. Теперь легко находятся начальные значения всех частей: 62, 65, 21 и 252.

Критерии. Только ответ — 2 балла. Правильно составлено уравнение — 2 балла. Решение с арифметическими ошибками — 4 балла. Критерии не суммируются. Полное решение — 7 баллов.

2. В школе учатся мальчики и девочки. Средний возраст мальчиков отличается от среднего возраста девочек, но среднее этих двух чисел совпадает со средним возрастом всех школьников. Кого в школе больше — мальчиков или девочек?

Ответ: *поровну.*

Решение. Пусть в школе учатся m мальчиков и d девочек, и пусть сумма возрастов всех мальчиков равна M, а сумма возрастов всех девочек равна D. Тогда средний возраст всех мальчиков — это $\frac{M}{m}$, средний возраст всех девочек — $\frac{D}{d}$, а средний возраст всех школьников — $\frac{M+D}{m+d}$. По условию,

$$\frac{M}{m} + \frac{D}{d} = 2 \cdot \frac{M+D}{m+d}\,.$$

Это равенство несложно преобразовать к виду $(d-m)(Md-Dm) = 0$. Поскольку $\frac{M}{m} \neq \frac{D}{d}$, то есть $Md \neq Dm$, заключаем, что $m = d$. Итак, мальчиков и девочек в школе одинаковое количество.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Правильно составлено уравнение для средних — 2 балла. Решение уравнения $(d-m)(Md-Dm) = 0$, в котором не разобран случай $Md = Dm$, — 6 баллов. Полное решение — 7 баллов.

3. Известно, что уравнения $x^2+ax+b = 0$ и $x^3+bx+a = 0$ имеют общий корень и $a > b > 0$. Найдите его.

Ответ: -1.

Решение. Домножим первое уравнение на x и вычтем из него второе. Общий корень исходных уравнений будет и корнем получившегося уравнения

$$(x^3 + ax^2 + bx) - (x^3 + bx + a) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a(x^2-1) = 0.$$

У последнего уравнения два корня — это 1 и -1. Если общий корень $x = 1$, то при подстановке его в каждое уравнение получим равенство $1 + a + b = 0$, которое в силу условия $a > b > 0$ выполняться не может, противоречие.

Если же общий корень $x = -1$, то при подстановке в уравнения получим $1 - a + b = 0$, которое не противоречит условию.

`Замечание`. Возможны и другие способы решения.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Не исключены лишние корни — снимаются 2 балла. Отсутствует проверка корня $x = -1$ на соответствие условию — снимаются ещё 2 балла. Упущен один из возможных корней — не более 3 баллов. Полное решение — 7 баллов.

4. В школьном турнире по шахматам соревновались мальчики и девочки, причём мальчиков было в 5 раз больше, чем девочек. По правилам турнира каждый шахматист играл с каждым другим *дважды*. Сколько всего игроков принимали участие, если известно, что мальчики набрали в сумме ровно в два раза больше очков, чем девочки? (За победу в шахматной партии начисляют 1 очко, за ничью — 0,5 очка, за проигрыш — 0 очков.)

Ответ: 6 *игроков.*

Решение. Пусть в турнире принимали участие d девочек и $5d$ мальчиков. Тогда всего игроков было $d+5d = 6d$; играя по две партии каждый с каждым они сыграли между собой $2\cdot\frac{1}{2}\cdot 6d(6d-1) = 6d(6d-1)$ партий. Поскольку в каждой партии разыгрывается одно очко, общее число очков, набранных всеми участниками, также равно $6d(6d-1)$. Из них у мальчиков две третьих, а у девочек — одна треть общего количества очков, то есть у девочек $\frac{1}{3}\cdot 6d(6d-1) = 2d(6d-1)$ очков.

Заметим, что если каждая девочка выиграла у всех мальчиков, то вместе девочки набрали максимум $2\cdot d\cdot 5d = 10d^2$ очков, а играя между собой, девочки распределили $2\cdot\frac{1}{2}\cdot d(d-1)$ очков. Поэтому *наибольшее* количество очков, которое могли набрать девочки, равно $10d^2 + d(d-1) = 11d^2 - d$. Значит,

$$2d(6d-1) \leqslant 11d^2 - d \quad \Longleftrightarrow \quad d^2 \leqslant d.$$

Следовательно, девочек не могло быть больше одной. Если девочка была одна, то мальчиков было пятеро, всего — 6 игроков. Шестеро ребят сыграли между собой $6\cdot 5 = 30$ партий и разыграли 30 очков. Девочка набрала 10 очков, выиграв у каждого из пяти мальчиков по две партии. Играя между собой, мальчики разыграли оставшиеся 20 очков.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Правильный пример — 2 балла. Подсчёт числа очков всех девочек — 2 балла. Оценка числа очков девочек — 4 балла. Критерии не суммируются. Полное решение — 7 баллов.

5. Точки O и I — центры описанной и вписанной окружностей треугольника ABC, M — середина дуги AC описанной окружности (не содержащей B). Известно, что $AB = 15$, $BC = 7$ и $MI = MO$. Найдите AC.

Ответ: $AC = 13$.

Решение. (Рис. 3). Сначала докажем, что $MI = MA$ (*лемма о трезубце*).

Действительно, внешний угол AIM треугольника AIB равен сумме углов BAI и ABI, и так как AI и BI — биссектрисы, то $\angle AIM = \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B$. Угол IAM равен сумме углов IAC и CAM. Но $\angle IAC = \frac{1}{2}\angle A$, а $\angle CAM = \angle CBM = \frac{1}{2}\angle B$ — как вписанные.

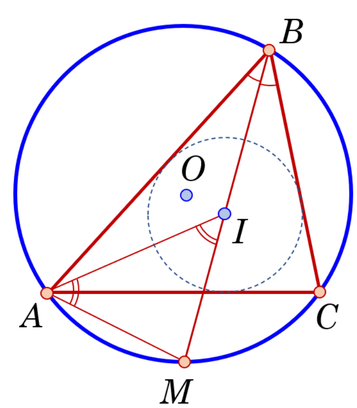

Рис. 3

Отсюда следует, что $\angle IAM = \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B = \angle AIM$, и значит, треугольник AMI — равнобедренный, $MI = MA$. По условию $MO = MI$, поэтому по лемме о трезубце $AO = MO = MI = MA$. Значит, треугольник AOM — равносторонний и $\angle AOM = 60^\circ$. Поскольку центральный угол AOM вдвое больше вписанного угла ABM, имеем $\frac{1}{2}\angle B = 30^\circ$, то есть $\angle B = 60^\circ$.

По теореме косинусов $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\cdot AB\cdot BC\cos 60^\circ = 13^2$.

Критерии. Ответ без объяснений — 0 баллов. Доказано, что угол B равен 60° — 5 баллов. За отсутствие доказательства леммы о трезубце баллы не снижаются. Полное решение — 7 баллов.

10 класс

1. В школе учатся мальчики и девочки. Средний возраст мальчиков отличается от среднего возраста девочек, но среднее этих двух чисел совпадает со средним возрастом всех школьников. Кого в школе больше — мальчиков или девочек?

Ответ: *поровну.*

Решение. Пусть в школе учатся m мальчиков и d девочек, и пусть сумма возрастов всех мальчиков равна M, а сумма возрастов всех девочек равна D. Тогда средний возраст всех мальчиков — это $\frac{M}{m}$, средний возраст всех девочек — $\frac{D}{d}$, а средний возраст всех школьников — $\frac{M+D}{m+d}$. По условию,

$$\frac{M}{m} + \frac{D}{d} = 2 \cdot \frac{M+D}{m+d}\,.$$

Это равенство несложно преобразовать к виду $(d-m)(Md-Dm) = 0$. Поскольку $\frac{M}{m} \neq \frac{D}{d}$, то есть $Md \neq Dm$, заключаем, что $m = d$. Итак, мальчиков и девочек в школе одинаковое количество.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Правильно составлено уравнение для средних — 2 балла. Решение уравнения $(d-m)(Md-Dm) = 0$, в котором не разобран случай $Md = Dm$, — 6 баллов. Полное решение — 7 баллов.

2. На доске в строчку написаны двадцать троек. Поставив между некоторыми из них знак «+», Вася обнаружил, что сумма равна 600. Сколько плюсов поставил Вася?

Ответ: 9 *плюсов.*

Решение. Так как цифр двадцать, то слагаемых может быть от 1 до 20. Поделим сумму и все слагаемые на 3. Теперь слагаемые имеют вид 1, 11, 111 и так далее, а сумма равна 200. Для того, чтобы сумма оканчивалась цифрой 0, число слагаемых должно делиться на 10. Значит, слагаемых либо 10, либо 20. Если слагаемых 20, то все слагаемые состоят из одной цифры, и сумма получается слишком маленькая. Значит, слагаемых ровно 10, а плюсов между ними — 9.

Пример равенства с девятью плюсами: $333 + 33 \cdot 8 + 3 = 600$.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Правильный пример — 3 балла. Доказано, что других вариантов нет — 4 балла. Полное решение — 7 баллов.

3. Верно ли, что при любых a, b и c хотя бы одно из уравнений $ax^2 + 2bx + c = 0$, $bx^2 + 2cx + a = 0$, $cx^2 + 2ax + b = 0$ имеет решение?

Ответ: *верно.*

Решение. Если хотя бы одно из чисел a, b, c равно нулю, то по крайней мере одно из уравнений будет иметь корень $x = 0$, и значит, утверждение верно. Рассмотрим случай, когда числа a, b, c отличны от нулю.

Предположим, что все три квадратных уравнения не имеют решений, поэтому дискриминанты этих трёхчленов отрицательные, то есть справедливы неравенства:

$$b^2 < ac, \quad c^2 < ab, \quad a^2 < bc.$$

Так как левые части всех неравенств — положительные, то правые части тоже положительные. Перемножив эти неравенства, получим противоречие: $a^2b^2c^2 < a^2b^2c^2$.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Не разобран случай, когда одно из чисел a, b, c равно нулю, — 6 баллов. Полное решение — 7 баллов.

4. В школьном турнире по шахматам соревновались мальчики и девочки, причём мальчиков было в 5 раз больше, чем девочек. По правилам турнира каждый шахматист играл с каждым другим *дважды*. Сколько всего игроков принимали участие, если известно, что мальчики набрали в сумме ровно в два раза больше очков, чем девочки? (За победу в шахматной партии начисляют 1 очко, за ничью — 0,5 очка, за проигрыш — 0 очков.)

Ответ: 6 *игроков.*

Решение. Пусть в турнире принимали участие d девочек и $5d$ мальчиков. Тогда всего игроков было $d+5d = 6d$; играя по две партии каждый с каждым они сыграли между собой $2\cdot\frac{1}{2}\cdot 6d(6d-1) = 6d(6d-1)$ партий. Поскольку в каждой партии разыгрывается одно очко, общее число очков, набранных всеми участниками, также равно $6d(6d-1)$. Из них у мальчиков две третьих, а у девочек — одна треть общего количества очков, то есть у девочек $\frac{1}{3}\cdot 6d(6d-1) = 2d(6d-1)$ очков.

Заметим, что если каждая девочка выиграла у всех мальчиков, то вместе девочки набрали максимум $2\cdot d\cdot 5d = 10d^2$ очков, а играя между собой, девочки распределили $2\cdot\frac{1}{2}\cdot d(d-1)$ очков. Поэтому *наибольшее* количество очков, которое могли набрать девочки, равно $10d^2 + d(d-1) = 11d^2 - d$. Значит,

$$2d(6d-1) \leqslant 11d^2 - d \quad\Longleftrightarrow\quad d^2 \leqslant d.$$

Следовательно, девочек не могло быть больше одной. Если девочка была одна, то мальчиков было пятеро, всего — 6 игроков. Шестеро ребят сыграли между собой $6\cdot 5 = 30$ партий и разыграли 30 очков. Девочка набрала 10 очков, выиграв у каждого из пяти мальчиков по две партии. Играя между собой, мальчики разыграли оставшиеся 20 очков.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Правильный пример — 2 балла. Подсчёт числа очков всех девочек — 2 балла. Оценка числа очков девочек — 4 балла. Критерии не суммируются. Полное решение — 7 баллов.

5. Угол A ромба $ABCD$ равен $60°$. Прямая, проходящая через точку C, пересекает отрезок AB в точке M и прямую AD — в точке N. Докажите, что угол между прямыми MD и NB равен $60°$. –

Решение. Обозначим через K точку пересечения прямых MD и NB (рис. 4). Заметим, что треугольник ABD равносторонний, $\angle BAD = \angle ABD = \angle BDA = 60°$. Из подобия треугольников BMC и AMN, а также MAN и CDN следует

$$\frac{MB}{AB} = \frac{MC}{CN}, \qquad \frac{MC}{CN} = \frac{AD}{DN}.$$

Поскольку $AB = BD = AD$, имеем

$$\frac{MB}{BD} = \frac{MB}{AB} = \frac{MC}{CN} = \frac{AD}{DN} = \frac{BD}{DN}.$$

Треугольники MBD и BDN имеют равные углы: $\angle ABD = \angle BDA$ и прилегающие к ним пропорциональные стороны. Следовательно, треугольники MBD и BDN подобны. Поскольку углы между соответственными сторонами подобных треугольников равны, то углы BDM и DNB равны. Искомый угол BKD – внешний угол треугольника NKD – равен $\angle DNK + \angle KDN = \angle BDM + \angle KDN = 60°$.

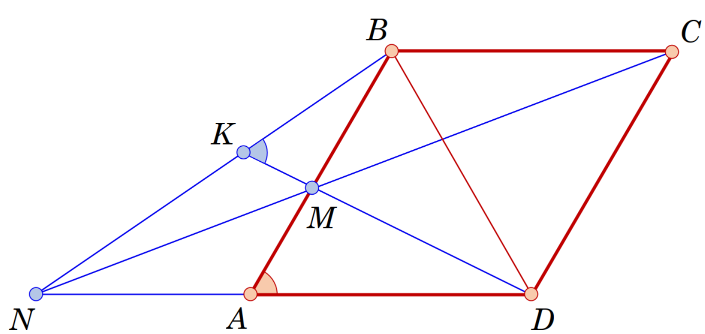

Рис. 4

Критерии. Отмечено подобие треугольников BMC и AMN (или MAN и CDN) — 1 балл. Доказано подобие треугольников MBD и BDN — 4 балла. Получено равенство $\angle BDM = \angle DNB$ — 5 баллов. Критерии не суммируются. Полное решение — 7 баллов.

11 класс

1. В школе учатся мальчики и девочки. Средний возраст мальчиков отличается от среднего возраста девочек, но среднее этих двух чисел совпадает со средним возрастом всех школьников. Кого в школе больше — мальчиков или девочек?

Ответ: *поровну.*

Решение. Пусть в школе учатся m мальчиков и d девочек, и пусть сумма возрастов всех мальчиков равна M, а сумма возрастов всех девочек равна D. Тогда средний возраст всех мальчиков — это $\frac{M}{m}$, средний возраст всех девочек — $\frac{D}{d}$, а средний возраст всех школьников — $\frac{M+D}{m+d}$. По условию,

$$\frac{M}{m} + \frac{D}{d} = 2 \cdot \frac{M+D}{m+d}\,.$$

Это равенство несложно преобразовать к виду $(d-m)(Md-Dm)=0$. Поскольку $\frac{M}{m} \neq \frac{D}{d}$, то есть $Md \neq Dm$, заключаем, что $m=d$. Итак, мальчиков и девочек в школе одинаковое количество.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Правильно составлено уравнение для средних — 2 балла. Решение уравнения $(d-m)(Md-Dm)=0$, в котором не разобран случай $Md=Dm$, — 6 баллов. Полное решение — 7 баллов.

2. Докажите, что для любых неотрицательных чисел x и y справедливо неравенство:

$$2^x x + 2^y y \geqslant 2^y x + 2^x y\,.$$

Решение. Разность левой и правой частей неравенства несложно разложить на множители, она равна $(x-y)(2^x-2^y)$. Функция $f(x)=2^x$ возрастает при $x \geqslant 0$, поэтому если $x \geqslant y$, то $2^x \geqslant 2^y$, и наоборот, если $y \geqslant x$, то $2^y \geqslant 2^x$.

Во всех случаях $(x-y)(2^x-2^y) \geqslant 0$, а это равносильно требуемому неравенству.

Критерии. Разложение на множители — 1 балл. Отмечено, что при $x \geqslant y$ верно $2^x \geqslant 2^y$ — ещё 1 балл. Полное решение — 7 баллов.

3. Точки O и I — центры описанной и вписанной окружностей треугольника ABC, M — середина дуги AC описанной окружности (не содержащей B). Известно, что $AB=15$, $BC=7$ и $MI=MO$. Найдите AC.

Ответ: $AC=13$.

Решение. (Рис. 5). Сначала докажем, что $MI=MA$ (*лемма о трезубце*).

Действительно, внешний угол AIM треугольника AIB равен сумме углов BAI и ABI, и так как AI и BI — биссектрисы, то $\angle AIM = \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B$. Угол IAM равен сумме углов IAC и CAM. Но $\angle IAC = \frac{1}{2}\angle A$, а $\angle CAM = \angle CBM = \frac{1}{2}\angle B$ — как вписанные.

Отсюда следует, что $\angle IAM = \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B = \angle AIM$, и значит, треугольник AMI — равнобедренный, $MI=MA$. По условию $MO=MI$, поэтому по лемме о трезубце $AO=MO=MI=MA$. Значит, треугольник AOM — равносторонний и $\angle AOM = 60^\circ$. Поскольку центральный угол AOM вдвое больше вписанного угла ABM, имеем $\frac{1}{2}\angle B = 30^\circ$, то есть $\angle B = 60^\circ$.

По теореме косинусов $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\cdot AB\cdot BC\cos 60^\circ = 13^2$.

Критерии. Ответ без объяснений — 0 баллов. Доказано, что угол B равен 60° — 5 баллов. За отсутствие доказательства леммы о трезубце баллы не снижаются. Полное решение — 7 баллов.

4. Найдите все пары натуральных чисел a и b такие, что 3^a+4^b является квадратом целого числа.

Ответ: $a = b = 2$.

Решение. Из равенства $3^a + 4^b = n^2$ ясно, что число n — нечётное, и поэтому $n = 2x + 1$. Тогда исходное равенство можно записать так: $3^a + 4^b = (2x+1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$, откуда следует, что число 3^a имеет остаток 1 при делении на 4. Последнее возможно только при условии чётного a, то есть $a = 2y$ для некоторого натурального y, и значит,

$$9^y + 4^b = (2x+1)^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2^{2b} = (2x+1)^2 - (3^y)^2 = (2x+1-3^y)(2x+1+3^y).$$

Оба сомножителя в правой части являются степенями двойки, их сумма равна $2(2x+1) = 4x+2$, то есть не делится на 4, и значит, ровно одно из них не делится на 4. Единственная степень двойки с таким свойством — это 2^1, поэтому

$$\begin{cases} 2x + 1 - 3^y = 2, \\ 2x + 1 + 3^y = 2^{2b-1}. \end{cases}$$

Вычитая равенства друг из друга, получим $3^y = 2^{2b-2} - 1 = (2^{b-1} - 1)(2^{b-1} + 1)$. Каждое из чисел $2^{b-1} - 1$ и $2^{b-1} + 1$ является степенью тройки, причём разность этих чисел равна 2. Единственная пара таких степеней — это $3^0 = 1$ и 3^1. (Для любых других степеней тройки их разность больше 2.) Значит, $2^{b-1} - 1 = 1$, то есть $b = 2$. Тогда $3^y = 2^{2b-2} - 1 = 3$, $y = 1$, отсюда $a = 2y = 2$. В итоге получаем $3^2 + 4^2 = 5^2$, то есть $n = 5$.

Критерии. Только ответ — 1 балл. Доказана чётность числа a — ещё 1 балл. Доказано, что сомножители являются степенями двойки или тройки, — до 3 баллов. Критерии суммируются. Полное решение — 7 баллов.

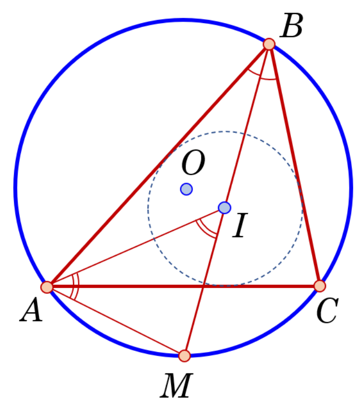

Рис. 5

5. Даны n различных положительных чисел. Из них составляются суммы с любым числом слагаемых от 1 до n.

а) Какое наименьшее количество различных сумм можно получить?

б) Какое наибольшее количество различных сумм можно получить?

Ответ: *а*) $\frac{1}{2}n(n+1)$; *б*) $2^n - 1$.

Решение. Можно считать, что исходные положительные числа расположены в порядке возрастания: $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Рассмотрим числа

$$\begin{array}{lllll}
a_1, & a_2, & \ldots\ a_{n-2}, & a_{n-1}, & a_n, \\
a_1 + a_n, & a_2 + a_n, & \ldots\ a_{n-2} + a_n, & a_{n-1} + a_n, & \\
a_1 + a_{n-1} + a_n, & a_2 + a_{n-1} + a_n, & \ldots\ a_{n-2} + a_{n-1} + a_n, & & \\
\multicolumn{5}{l}{\dotfill ,} \\
a_1 + a_2 + \ldots + a_n. & & & &
\end{array}$$

Очевидно, что здесь каждое число больше предыдущего, поэтому все выписанные числа различны. Их количество $n + (n-1) + \ldots + 1 = \frac{1}{2}n(n+1)$ соответствует требованиям задачи.

Осталось привести пример, в котором больше, чем $\frac{1}{2}n(n+1)$ различных сумм получить не удастся. Для этого подойдет набор из первых n натуральных чисел, из которых нельзя составить больше, чем $\frac{1}{2}n(n+1)$ различных сумм: эти суммы — все натуральные числа от 1 до $1 + 2 + \ldots + +n = \frac{1}{2}n(n+1)$.

б) Каждое число a_i входит или не входит в рассматриваемую сумму. Кроме того, нужно ещё исключить сумму, не содержащую ни одного слагаемого, поэтому различных сумм из n слагаемых можно составить не более, чем $2^n - 1$.

Числа 1, 10, 10^2, …, 10^{n-1} дают пример n различных чисел, из которых можно образовать наибольшее число различных сумм. Сумма любых k чисел этого набора — это число, в десятичной записи которого используются только 1 и 0. Каждая такая сумма может быть представлена в виде

n-элементного упорядоченного набора из 0 и 1. Поскольку на каждом месте набора могут быть только две цифры, их общее количество равно $2\cdot2\cdot\ldots\cdot2=2^n$. Единственный невозможный набор, составленный из n нулей, необходимо исключить, поэтому общее количество допустимых наборов равно 2^n-1.

Критерии. Решение каждого из пунктов *а*) и *б*) — по 3 балла. В пункте *а*) доказано, что различных сумм не менее $\frac{1}{2}n(n+1)$ — 2 балла. Пример с наименьшим числом различных сумм — 1 балл. В пункте *б*) доказано, что различных сумм не более (2^n-1) — 1 балл. Пример с наибольшим числом различных сумм — 2 балла. Полное решение обоих пунктов — 7 баллов.